数理解析研究所講究録
624巻 1987年 7-17

リンクの不変量のパラレルバージョンについて

大阪大学　理学部
村上　順

序.

ここではリンクの不変量のパラレルバージョンを表現論的観点から調べる。R を、ブレイド群の表現と関係した algebra のトレースの和で定まるリンクの不変量とする。（例、Jones多項式） すると、R のパラレルバージョンもまたこのような algebra のトレースであらわされる。（§2）さらに Jones 多項式のパラレルバージョンに関係する３本の糸からなるブレイド群の表現を求める。（§３）証明等は［５］による。

あるリンク K と複素数値のリンクのイソトピータイプの不変量 R と正の整数 r に対し、$R^{(r)}(K)=R(K^{(r)})$ とおく。ただし、$K^{(r)}$ は K のパラレルリンク（定義1.5）とする。すると $R^{(r)}$ もリンクのイソトピータイプの不変量となる。Alexander 多項式 Δ の場合は、$\Delta^{(r)}(K)$ は $\Delta(K)$ から決まってしまうが、Jones 多項式 V に対しては、$V(K_1)=V(K_2)$ となるが、$V^{(2)}(K_1)\neq V^{(2)}(K_2)$ となる結び目の組（K_1、K_2）が知られている［3］，［4］，［6］。$V^{(2)}$ を 3-ブレイド群の指標（表現のトレース）であらわしたときに V では出てこない既約指標があることが［4］で示され、これが上のような結び目の組があることの一つの説明になっている。ここでは、ブレイド群の指標の和で書ける不変量 R に対し§２でそのパラレルバージョンと関係する指標の求め方を示す。このとき、R のr-パラレルバージョンは自然にいくつかの不変量にわかれ、ある種のサテライトリンクの R もこれらの不変量を用いて書ける。また、3-ブレイドを閉じてえられる結び目の Jones 多項式のパラレルバージョンに対して、それをあらわすのに必要な指標を§３で

求める。$V^{(r)}$ を指標の和であらわしたとき、$V^{(r')}$（ｒ’＜ｒ）には出てこない既約指標があるので、$V^{(r)}$ は $V^{(r')}$（ｒ’＜ｒ）ではあらわせないと思われる。他の不変量に対してもこのような指標を求めることが課題となっている。

１．準備

まずはじめにリンクとブレイドの間の基本的な関係について復習し、次にブレイド群のの表現からくるリンクの不変量について述べ、最後にパラレルリンクを定義する。

B_nをｎ本の糸を持つブレイド群とし、$B=\{(b,\ n) \mid b\quad B_n,\ n=1,\ 2,\ ...\}$とする。Ｂの元（ｂ，ｎ）にたいして、$(b,\ n)^{\wedge}$ をその始点と終点とを結んでできるリンクとするとき、これをｂを閉じてできるリンクと呼ぶ。単に $b^{\wedge}$ とも書く。

定理１．１．（Ａｌｅｘａｎｄｅｒ，Ｙａｍａｄａ [1], [7]） 任意のリンク図形 Ｋ はあるブレイド（ｂ，ｎ）を閉じてできるリンクとイソトピックである。また、ｎ は Ｋ の Ｓｅｉｆｅｒｔ ｃｉｒｃｌｅ の個数に等しくできる。

$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ をブレイド群 B_n の標準的な生成元とし、ξ_n を、$\xi_n(\sigma_i)=\sigma_i$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$で定まる B_n から B_{n+1} への群準同型とする。このとき２個のブレイドを閉じて得られるリンクがイソトピックになるための条件が次であたえられる。

定理１．２．（Ｍａｒｋｏｖ [1]） ２つのブレイド（ｂ，ｎ），（ｂ’，ｎ’）を閉じて得られるリンクがイソトピックになるための必要十分条件は、（ｂ，ｎ）と（ｂ’，ｎ’）が Ｂ／～ の同じ同値類にはいることである。ただし ～ は次の２つの条件で定まる同値関係とする。

（ｉ）　$(bb',\ n) \sim (b'b,\ n) \quad (b,\ b' \in B_n)$

（ｉｉ）　$(b,\ n) \sim (\xi_n(b)\sigma_n^{\pm 1},\ n+1) \quad (b \in B_n)$

Jones は $B_n/\sim$ 上の関数として Jones 多項式を定義した。ここでは Jones 多項式、Jones algebra とブレイドの間の関係を次のように一般化する。M_n を、複素数上の群環 $\mathbb{C}[B_n]$ の商とし、p_n を $\mathbb{C}[B_n]$ から M_n への標準射影とする。さらに M_n から M_{n+1} への algebra 準同型 ζ_n で次をみたすものが存在するとする。

$$\zeta_n \circ p_n = p_{n+1} \circ \zeta_n$$

定理1.2によりつぎがなりたつ。

系1.3.

$R_n : M_n \to \mathbb{C}$ をつぎをみたすC-線形写像とする。

(i) $R_n(p_n(b\,b')) = R_n(p_n(b'\,b)) \qquad (b,\ b' \in B_n)$

(ii) $R_n(p_n(b)) = R_{n+1}(\zeta_{n+1}(p_n(b))p_{n+1}(\sigma_n^{\pm 1})) \qquad (b \in B_n)$

$R : B \to \mathbb{C}$ を $R((b,\ n)) = R_n(p_n(b))$ で定まる写像とすると、R はリンクのイソトピー不変量になる。

定義1.4. algebra の列 $M_1, M_2, \ldots$ により、不変量 R が系1.3のように factor されるとき、これらの algebra を R に associate した algebra という。

2変数多項式や Kauffman 多項式もこのような algebra を持つことが知られており、それらはみな有限次元でほとんどすべての場合 semismimple である。このような場合については次がなりたつ。$M_n\hat{}$ を M_n の規約表現の同値類の集合とし、X_μ を $\mu \in M_n\hat{}$ に対応する規約表現の指標とする。このとき、

$$R((b,\ n)^{\wedge}) = \sum_{\mu\in M_n^{\wedge}} a_\mu X_\mu(b) \qquad (a_\mu \in \mathbb{C}) \qquad (1.1)$$

正の整数 r に対して、r-パラレルリンクをブレイドを用いて定義しよう。

$\sigma(i,j) = \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_j$ とし、$f_n^{(r)}$ を次で定まる群準同型とする。

$$f_n^{(r)}(\sigma_i)$$
$$= \sigma(ri-r+1, ri-1)^{-r}\sigma(ri, ri+r-1)\sigma(ri-1, ri+r-2)\ldots\sigma(ri-r+1, ri)$$

さらに $f^{(r)}: B\to B$ を $f^{(r)}(b,n) = (f_n^{(r)}(b), rn)$ で定まる写像とする。

すると $b^{\wedge}$ と $b'^{\wedge}$ がイソトピックなら $f^{(r)}(b)$ と $f^{(r)}(b')$ もイソトピックになり、$f^{(r)}$ はリンクの変換と思える。

定義1.5. リンク K にたいし、$f^{(r)}(K)$を K のr-パラレルリンクといい、$K^{(r)}$ と書く。$R^{(r)}(K)=R(K^{(r)})$ とすると、$R^{(r)}$ もリンクの不変量となるが、これを R のr-パラレルバージョンという。

式(1.1)より次式をえる。

$$R^{(r)}((b,\ n)^{\wedge}) = \sum_{\mu\in M_{rn}^{\wedge}} a_\mu X\ (f_n^{(r)}(b)) \qquad (1.2)$$

この式が我々の出発点である。

2. リンクの不変量のパラレルバージョン

前節でリンクの不変量 R のパラレルバージョン $R^{(r)}$ に対して式(1.2)をえた。しかしこの式は $R^{(r)}$ を計算するためには、それほど便利ではない。なぜなら指標 X_μ ($\mu \in M_n^\wedge$) に対応する表現 ρ_μ の表現空間 V_μ の次元が、ちいさな r，n にたいしてすら、かなり大きいのである。幸いなことに V の自然な B_n-加群としての分解がある。これについては詳しくは述べないがこれがあるために $R^{(r)}$ のリンクの不変量への分解（定理2.1）が存在して、式(1.2)を改良することができる。（定理2.2）さらにケーブルリンクを含むある種のサテライトリンクの不変量 R が、この分解にあらわれる不変量の和になっている。（定理2.4）

$\iota_i : M_r \to M_{rn}$ を $\iota_i(p_r(\sigma_j)) = p_{rn}(\sigma_{ri-r+j})$ で定まる包含写像とし、$x \in M_r$ に対して $I(x)=\iota_1(x)\iota_2(x)\ldots\iota_n(x)$とする。$\nu \in M_r^\wedge$ に対し M_r の元で $\eta \in M_r^\wedge$ に対応する単純部分 algebra $M_{r,\eta}$ に制限するとき、もし$\nu \neq \eta$なら0、$\nu = \eta$なら単位元となるものを q_ν とする。$Q_\nu = I(q_\nu)$ とし、$R^{(r,\nu)}(b^\wedge)=R(p_{rn}(f_n^{(r)}(b))Q_\nu)$ とすると次が成り立つ。

定理2.1. $R^{(r,\nu)}$ <u>はリンクのイソトピー不変量になる。また、結び目</u> K <u>に対しては次がなりたつ。</u>

$$R^{(r)}(K) = \sum_{\nu \in M_r^\wedge} R^{(r,\nu)}(K)$$

$(b_1, \ldots, b_n) \in B_r^n$ の $v \in V$ への作用を $(b_1, \ldots, b_n)v = (\iota_1(p_r(b_1)), \ldots, \iota_n(p_r(b_n)))v$ で定義し、V_μ の B_r^n-部分加群がすべて

$(\rho_\nu{}^n$、$V_\nu{}^n)$ と equivalent になるような最大の $B_r{}^n$-部分空間を $V_{\mu,\nu}$ とする。ある線形空間 $W_{\mu,\nu}$ が存在して $V_{\mu,\nu} = W_{\mu,\nu} \otimes (\otimes^n V_\nu)$ となる。$V_{\mu,\nu} \ni v \neq 0$ をひとつ固定し、$U_{\mu,\nu} = W_{\mu,\nu} \otimes v^{\otimes n}$ とすると、$U_{\mu,\nu}$ は B_n-不変部分空間となる。ここへの B_n の表現を $\pi_{\mu,\nu}$ とし、その指標を $\omega_{\mu,\nu}$ とすると次が成り立つ。

定理2.2. b を b^ が結び目になるような n-ブレイドとする。このとき、

$$R^{(r,\nu)}((b,\ n)^{\wedge}) = \frac{\sum_{\mu \in M_{rn}^{\wedge}}}{\chi_\nu(1)} a_\mu\, \omega_{\mu,\nu}(b)$$

定義2.3. b を b^ が結び目になるような n-ブレイドとする。
$\iota_1': B_r \to B_{rn}$ を $\iota_1'(\sigma_i) = \sigma_i$ で定まる包含写像とする。$b' \in B_r$ を固定するとき、結び目 $(b_1,\ n_1)^{\wedge}$ と $(b_2,\ n_2)^{\wedge}$ がイソトピックなら $(f_{rn_1}^{(r)}(b_1)\,\iota_1'(b'),\ rn_1)^{\wedge}$ と $(f_{rn_2}^{(r)}(b_2)\,\iota_1'(b'),\ rn_2)^{\wedge}$ もイソトピックである。$(b,\ n)^{\wedge}$ に対して、$(f_n^{(r)}(b)\,\iota_1'(b'),\ rn)^{\wedge}$ のことを b' で定まる正のサテライトリンクと呼ぶ。

定理2.4. $P^{(r,b')}((b,\ n)^{\wedge}) = P(f_n^{(r)}(b)\,\iota_1'(b'),\ rn)^{\wedge}$ とすると、これは結び目の不変量となる。結び目 K に対し、次が成り立つ。

$$P^{(r,b')}(K) = \sum_{\nu \in M_r^{\wedge}} \frac{\chi_\nu(b')}{\chi_\nu(1)} P^{(r,\nu)}(K)$$

注意2.5. 定理2.1、2.2、2.4は一般のリンクの場合にも拡張できる。

3. Jones多項式のパラレルバージョン

ここでは Jones 多項式 V のパラレルバージョンについて考える。まず定理3.2により Jones 多項式に対して2節で定義された不変量 $V^{(r,\nu)}$ のあいだの関係を述べる。また定理3.3で3本の糸を持つブレイドを閉じてえられる結び目の Jones 多項式のパラレルバージョンの計算に必要な表現を求める。

3.1. 複素数 $t\neq 0$ に対し、Jone algebra $J_n(t)$ は次で定義される。

$$J_n(t)=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1} \mid e_ie_i=-(t^{1/2}+t^{-1/2})e_i,\ e_ie_{i+1}e_i=e_i\ (i=1,\ldots,n-1)\}$$

$J_n(t)$ は t が1の巾根でなければ半単純となる。以下このような t を1つ固定する。$\mathbb{C}[B_n]$ から $J_n(t)$ への準同型 p_n を次で定義する。

$$p_n(\sigma_i) = -t^{1/2} - t e_i$$

B_n の関係式と $J_n(t)$ の定義により、この写像は well-defined である。$e(i,i+2j-2)=e_i e_{i+2}\cdots e_{i+2j-2}$ とし、$J_{n,i}(t)=J_n(t)e(1,2j-1)J_n(t)$ とすると、$J_{n,i}(t)$ は $J_n(t)$ の両側イデアルで

$$J_n(t) = J_{n,0}(t)\supset J_{n,1}(t)\supset\cdots\supset J_{n,[n/2]}(t)$$

となっている。

$$A_{n,i}(t) = J_n(t)e(1,\ 2i-1)/(J_{n,i+1}(t)\cap J_n(t)e(1,\ 2i-1))$$

とすると、$A_{n,i}(t)$ は単純 $J_n(t)$-加群で、次が成り立つ。

$$J_n(t) = \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} \mathrm{End}\ A_{n,i}(t)$$

そこで $J\hat{} = \{(r,\ i) \mid 0 \leqq i \leqq [r/2]\}$ とする。また、
$\rho_{n,i} : J_n(t) \to \mathrm{End}\ A_{n,i}(t)$ とし、その指標を $X_{n,i}$ とするとき、

$$V(b\hat{}) = \sum_{s=0}^{[n/2]} a_{n,i}(t) X_{n,i}(b)$$

がなりたつ。ただし

$$a_{n,i}(t) = -(t^{1/2} + t^{-1/2})^{-1} t^{i-n/2}(1 - t^{n-2i+1}) / (1 - t)$$

とする。

$V^{(r,i)}$ を $\rho_{r,i}$ から定まる不変量とする。これらの間には次が成り立つ。

定理 3.2. ある t に依存する複素数 $c_{r,i,s}$ により、

$$V^{(r,i)} = \sum_{s=0}^{r-2i} c_{r,i,s} V^{(s,0)}$$

と書ける。

この定理により $V^{(r,0)}$ に対応する表現（定理２.２での π）の行列表示がわかれば、$V^{(r)}$ や $V^{(r,i)}$ も計算できる。３本の糸からなるブレイドを閉じてえられる結び目に関係した表現 $\pi_{(3r,i),(r,0)}$ についてはこのような行列はすべて求められる。

定理 3.3. $\pi_{(3r,i),(r,0)}(\sigma_1)$, $\quad _{(3r,i),(r,0)}(\sigma_2)$ の表現行列は次であたえられる。

$$\pi_{(3r,i),(r,0)}(\sigma_1) = (a_{i,j,k})_{0\le j,k\le d(r,i)}$$

$$\pi_{(3r,i),(r,0)}(\sigma_2) = (a_{i,d(r,i)-j,d(r,i)-k})_{0\le j,k\le d(r,i)}$$

where $d(r,i) = i$ (if $i\le r$) or $3r-2i$ (if $i>r$) and

$$a_{i,j,k} = \varepsilon(r-k)t^{\gamma(r,r-i,k,j-k)}g(i-k,j-k) \qquad (j\ge k,\ i\le r),$$

$$a_{i,j,k} = 0 \qquad (j<k,\ i\le r),$$

$$a_{i,j,k} = \varepsilon(r-k)t^{\gamma(r,i-r,k+i-r,j-k)}g(r-k,j-k) \qquad (j\ge k,\ i>r),$$

$$a_{i,j,k} = 0 \qquad (j<k,\ i>r),$$

where $\gamma(r,p,q,s) = \dfrac{r + (2r-q+1)j + (p+s)s}{2}$, $\varepsilon(q) = (-1)^q$

and $g(p,q) = g(p,q,t)$ is the Gauss' polynomial

$$g(p,0) = g(p,p) = 1, \quad g(p,q) = \frac{(t^q-1)\cdots(t^{q-p+1}-1)}{(t^p-1)\cdots(t-1)}.$$

3.4. Examples.

$r = 2$:

$$\pi_{(6,0),(2,0)}(\sigma_1) = t,$$

$$\pi_{(6,1),(2,0)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t^2 & -t^3 \end{pmatrix},$$

$$\pi_{(6,2),(2,0)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t^{3/2}(1+t) & -t^3 & 0 \\ t^3 & -t^{7/2} & t^4 \end{pmatrix},$$

$$\pi_{(6,3),(2,0)}(\sigma_1) = -t^3.$$

$r = 3$:

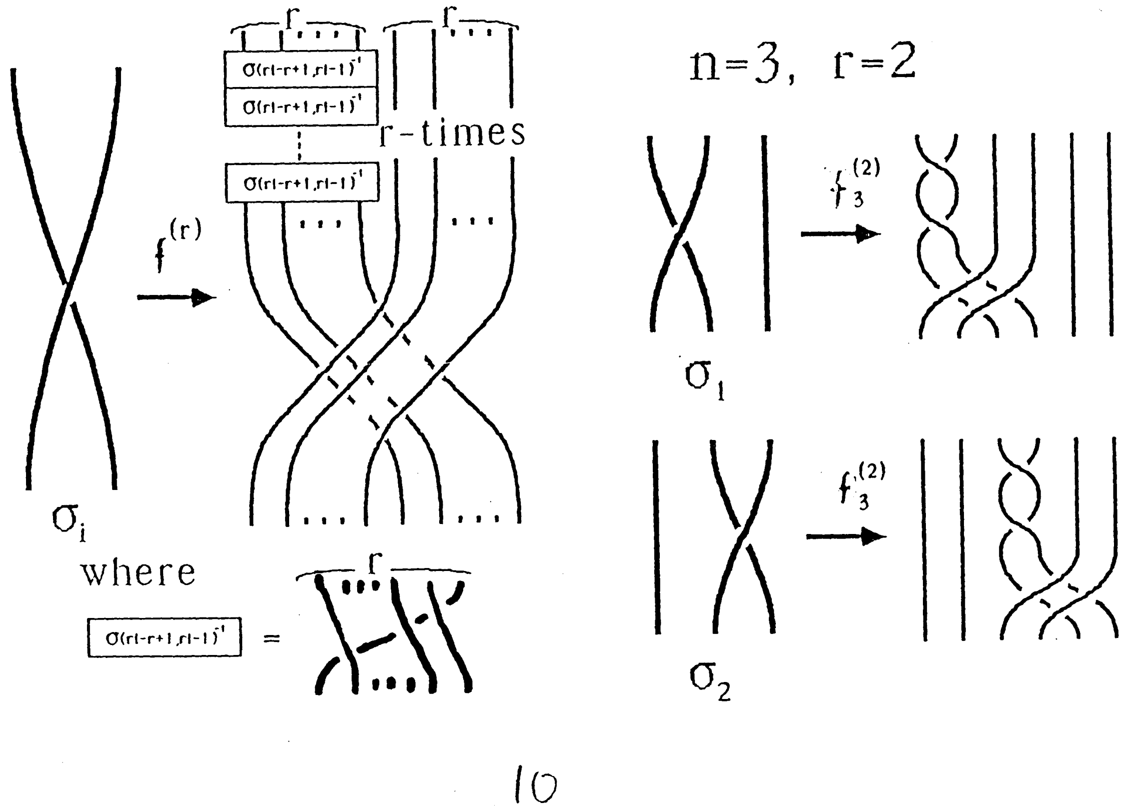
$$\pi_{(9,0),(3,0)}(\sigma_1) = -t^{3/2},$$

$$\pi_{(9,1),(3,0)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -t^{3/2} & 0 \\ -t^{3} & t^{9/2} \end{pmatrix},$$

$$\pi_{(9,2),(3,0)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -t^{3/2} & 0 & 0 \\ -t^{5/2}(1+t) & t^{9/2} & 0 \\ -t^{9/2} & t^{11/2} & -t^{13/2} \end{pmatrix},$$

$$\pi_{(9,3),(3,0)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -t^{3/2} & 0 & 0 & 0 \\ -t^{2}(1+t+t^{2}) & 0 & 0 & 0 \\ -t^{7/2}(1+t+t^{2}) & t^{5}(1+t) & -t^{13/2} & 0 \\ -t^{6} & t^{13/2} & -t^{7} & t^{15/2} \end{pmatrix},$$

$$\pi_{(9,4),(3,0)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} t^{9/2} & 0 \\ t^{11/2} & -t^{13/2} \end{pmatrix},$$



References:

[1] Birman, J.S.: Braids, Links, and Mapping Class Groups (Annals of Mathematics Studies 82), Princeton, 1974.

[2] Jones, V.F.R.: A polynomial invarinat for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 103-111.

[3] Morton, H.R. and Short, H.B.: The 2-variable polynomial of cable knots, preprint.

[4] Murakami, J.: On the Jones invariant of paralleled links and linear representations of braid groups, preprint.

[5] Murakami, J.: On the parallel version of a link invariant, in preparation.

[6] Yamada, S.: On the two variable Jones polynomial of satellite links, to appear in a Series of North-Holland Mathematics Studies.

[7] Yamada, S.: The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link, to appear in Invent. Math.